# de Rham上同调与Hodge定理

杨森宇 武汉大学

June 2024

## 目录



这篇读书笔记旨在介绍光滑流形的de Rham上同调理论, 建立Hodge定理并给出若干应用. 文中 $M$ 是一个 $n$ 维**紧致闭光滑流形**. 我们默认系数域是$\mathbb{R}$.

## 1 微分形式与外微分

$M$上可以自然地定义切丛 $TM$ 和余切丛 $T^*M$ . $p \in M$ 处的切空间和余切空间记为 $T_pM$ 和 $T_p^*M$ . 进而可以得到 $s$ 阶协变张量丛 $\otimes^s T^*M$ 和 $p$ 处的张量空间 $\otimes^s T_p^*M$ .

$\omega\in\otimes^s T^*M$称为 $s$ 阶**微分形式**，如果对于局部坐标的每个置换 $\pi$ 都有 $\omega\circ\pi=(-1)^\pi\omega$ . $\omega$ 固定在 $p$ 处就是一个反对称协变张量. 所有 $s$ -形式构成线性空间，同时也是 $\otimes^s T^*M$ 的子丛，称为 $s$-形式丛 $\bigwedge^s M$ , 在$p$处的纤维记为 $\bigwedge_p^s M$ . 由定义易知当 $s>n$ 时 $\bigwedge^s M=0$ , $\bigwedge^0 M=C^\infty(M)$ . $M$ 上的全体微分形式构成了形式丛 $\bigwedge M=\bigcup_s\bigwedge^s M$ .

在 $p\in M$ 处可以为 $\bigwedge_p M$ 赋予**外积** $\wedge$ 运算成为外代数, $\wedge:\bigwedge_p^r M\times\bigwedge_p^s M\to\bigwedge_p^{r+s} M$ .

**命题 1.1.** *$\wedge$ 具有以下性质:*

*(i) $\wedge$ 是双线性映射.*

*(ii) 交换性: 设 $\alpha\in\bigwedge_p^r M,\beta\in\bigwedge_p^s M$ , 则 $\beta\wedge\alpha=(-1)^{rs}\alpha\wedge\beta$ .*

*(iii) 结合性: 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\bigwedge_p M$ , 则 $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$.*

*(iv) 基底: 设 $T_p^*M$ 的局部坐标 $\{e_i\}$ , 则 $\{e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge...\wedge e_{i_s}:1\leq i_1<i_2<...<i_s\leq n\}$ 是 $\bigwedge_p^s M$的一组基底.*

借助流形坐标卡的转移函数和张量的坐标变换我们可以在 $\bigwedge M$ 上整体定义 $\wedge$ :

$$\wedge:\bigwedge^r M\times\bigwedge^s M\to\bigwedge^{r+s} M,$$

并继承了命题中的性质. 这使得 $\bigwedge M$ 成为一个分次环.

**命题 1.2.** *设 $f:M\to N$ 是流形间的光滑映射, $f$ 自然地诱导了拉回映射 $f^*:T^*N\to T^*M,\bigwedge N\to\bigwedge M$ . 对 $\omega,\eta\in\bigwedge N$ , $h\in C^\infty(N)$ ,*

*(i) $f^*(h\omega)=h\circ f(f^*\omega)$ .*

*(ii)(自然性) $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$ .*

$\bigwedge M$ 上还可以定义重要的**外微分**运算 $\mathrm{d}:\bigwedge^s M\to\bigwedge^{s+1} M$ , 以下命题说明 $\bigwedge M$ 关于 $\mathrm{d}$ 是一个上链.

**命题 1.3.** *$\mathrm{d}$ 具有以下性质:*

*(i) $d$ 是线性映射.*

*(ii) 设 $\omega\in\bigwedge^r M,\eta\in\bigwedge^s M$ , 则 $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge\mathrm{d}\eta$ .*

*(iii) $\mathrm{d}$是边缘映射: $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ .*

*(iv) $\mathrm{d}$ 是链映射: $\mathrm{d}\circ f^*=f^*\circ\mathrm{d}$ .*

我们还需要**内乘**运算. 对向量场 $X\in\Gamma(TM)$ , 定义

$$i_X:\bigwedge^s\to\bigwedge^{s-1},$$

$$i_X\omega(Y_1,...,Y_{s-1})=\omega(X,Y_1,...,Y_{s-1}),\forall\omega\in\bigwedge^s.$$

**命题 1.4.** $i_X$ 具有以下性质:

*(i)* $i_X \circ i_X = 0$.

*(ii)* 设 $\omega \in \bigwedge^1$ , 则 $i_X\omega = \omega(X)$ .

*(iii)* 设 $\omega \in \bigwedge^r M, \eta \in \bigwedge^s M$ , 则 $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X\eta$ .

*(iv)* 设 $f \in C^\infty$ , 则 $i_{fX}\omega = f i_X\omega$ .

# 2 de Rham上同调简介

外微分 d: $\bigwedge^q M \to \bigwedge^{q+1} M$ 定义了边缘算子, 于是 $\bigwedge M$ 构成了一个上链:

$$0 \to \bigwedge^0 M \to \bigwedge^1 M \to ... \to \bigwedge^n M \to 0.$$

而且 d 是链映射. 自然可以定义$q$维**闭链**

$$Z^q(M) := \{\omega \in \bigwedge^q(M)\colon \mathrm{d}\omega = 0\},$$

和$q$维**边缘**

$$B^q(M) := \{\mathrm{d}\eta\colon \eta \in \bigwedge^{q-1}(M)\}.$$

$Z$和$B$中的元素称为**闭形式**和**恰当形式**. **de Rham上同调群** $H^*(M)$ 即刻画了两者的差异:

$$H^q(M) = Z^q(M)/B^q(M).$$

注 1. 值得注意的是, 外积 $\wedge$ 使 $H^q(M)$ 进一步成为一个上同调环:

$$\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M).$$

注 2. 准确来讲, $H^*(M)$ 应记为$H^*_{\mathrm{dR}}(M)$ , 但后面会指出它与奇异上同调同构，且这篇笔记不会涉及其他上同调, 所以仍采用简单的记法.

我们罗列以下结果以说明 $H^*(M)$ 满足 E-M 公理, 即确实是一个上同调理论.

**引理 2.1.** (Poincaré) $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$; $H^q(\mathbb{R}^n) = 0, 1 \le q \le n$.

注 3. 这个著名的引理表明闭形式在局部上总是恰当的，所以 $H^*(M)$ 应当刻画了 $M$ 的整体性质.

光滑映射 $f: M \to N$ 在 $\bigwedge$ 上的拉回 $f^*$ 也自然地作用于 $H^*$上:

$$f^*: H^*(N) \to H^*(M).$$

**定理 2.2.** *(同伦不变) 光滑映射 $f, g: M \to N$ 同伦, 则 $f^* = g^*: H^*(M) \to H^*(N)$.*

**推论 2.3.** *$M \simeq N \Rightarrow H^*(M) \cong H^*(N)$ .*

**定理 2.4.** *(M-V序列) 设开集 $U, V \subset M$ s.t. $M = U \cup V$ , 则有上链的短正合列*

$$0 \longrightarrow \bigwedge(M) \xrightarrow{i^*} \bigwedge(U) \oplus \bigwedge(V) \xrightarrow{j^*} \bigwedge(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

*其中 $i^*: \omega \mapsto (\omega |_U, \omega |_V)$ , $j^*: (\tau, \eta) \mapsto \tau |_{U\cap V} - \eta |_{U\cap V}$ , 以及上同调的长正合列*

$$... \longrightarrow H^q(M) \xrightarrow{i^*} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{j^*} H^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(M) \longrightarrow ...$$

*其中边缘同态 $d^*$ 由同调代数中的 snake lemma 给出.*

有限开集族 $\{U_i\}_{i=1}^k$ 称为 $M$ 的**好覆盖**, 如果 $M = \bigcup U_i$ , 且任一 $U_i \cong \mathbb{R}^n$. 好覆盖可以帮助我们用 M-V 序列把局部性质“粘贴”成整体性质. 每个光滑流形都可以赋予一个黎曼度量, 黎曼几何中有一个著名结论指出每个点都有一个测地凸邻域(Whitehead), 所以对紧致的 $M$ 好覆盖总是存在的.再结合 Poincaré 引理就有: $H^q(M)$ 都是有限维的!

**定理 2.5.** *(de Rham) $M$的 de Rham 上同调和奇异上同调之间有自然的同构映射.*

# 3 度量与定向

$M$ 如果存在一族坐标卡 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ s.t. 对任意 $U_\alpha, U_\beta$ ,

$$\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \neq 0 \text{ on } U_\alpha \cap U_\beta,$$

则称 $M$ 是**可定向**流形. $\det J$ 的符号给出了两个不同的定向.

每个光滑流形都可以赋予一个黎曼度量 $g$ . 对于可定向的黎曼流形 $(M, g)$ , 在每个 $U_\alpha$ 上考虑

$$\Omega_\alpha := \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)} dx_\alpha^1 \wedge ... \wedge dx_\alpha^n,$$

其中局部坐标下

$$g = g_{ij}^\alpha dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j.$$

由于转移函数非奇异，在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 上有坐标变换

$$g_{ij}^{\beta} = J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \cdot (g_{ij}^{\alpha}) \cdot J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^T,$$

$$dx_\beta^1 \wedge ... \wedge dx_\beta^n = \det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot dx_\alpha^1 \wedge ... \wedge dx_\alpha^n,$$

所以 $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ 相容, 我们整体定义了一个处处非零的微分形式, 称为**体积形式** $\Omega$ .

反之, 如果存在 $\omega \in \bigwedge^n M$ 处处非零, 可以在每个坐标卡处定义光滑函数

$$f_\alpha := \omega(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}),$$

则 $f_\alpha$ 在 $U_\alpha$ 上处处非零. 可以适当调整 $U_\alpha$ 的坐标次序使得每个$f_\alpha > 0$. 而在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上

$$f_\beta = \det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \cdot f_\alpha,$$

所以 $\det J > 0$, 这给出了 $M$ 的一个整体定向. 我们得到以下定理:

**定理 3.1.** *$M$可定向当且仅当存在处处非零的 $\omega \in \bigwedge^n M$.*

下一个定理则进一步在上同调层面刻画了定向. 如果 $M$ 可定向, 由 $\Omega$ 处处非零可知其积分不为零, 根据 Stokes 公式可知 $[\Omega] \neq 0$ , $H^n(M) \neq 0$

**定理 3.2.** *$M$ 可定向 $\Rightarrow H^n(M) \cong \mathbb{R}$.*

证明是考虑以下同态

$$H^n(M) \to \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_M \omega,$$

只需验证它是单的. 具体过程略.

*注* 4. 事实上还可以证明 $M$ 不可定向 $\Rightarrow H^n(M) = 0$ , 所以上述条件是等价的.

上述定理使我们找到了 $H^*(M)$的基本类 $[\Omega]$ . $\wedge : \bigwedge^q \times \bigwedge^{n-q} \to \bigwedge^n$ 自然地诱导了**Poincaré配对** $D$ :

$$H^q \to (H^{n-q})^*, \langle D[\omega], \tau \rangle = \int_M \omega \wedge \tau.$$

$D$ 是一个同态. 借助基本类, 类似奇异上同调的做法可以得到著名的**Poincaré对偶**定理:

**定理 3.3.** *(Poincaré) 设 $M$ 可定向, 则 $D$ 是同构映射.*

但这里我们不打算借助这种局部到整体的常规证明手段，而是计划绕个远路，利用 de Rham上同调本身的特点刻画这种对偶，从更整体的角度审视. 这就引出了Hodge $\star$ 算子和Hodge定理.

# 4 Hodge $\star$ 算子与Laplace-Hodge算子$\Delta$

笔记从这里开始要求 $M$ **可定向**并赋予度量$g$ 成为**黎曼流形**.

对于有限维空间 $V$ , $\bigwedge V$ 为其外代数. 易知 $\dim \bigwedge^k V = \dim \bigwedge^{n-k} V$ , 所以两者作为线性空间同构. 如果在 $V$ 上赋予内积 $\langle -,- \rangle$ 和定向 $\Omega \in \bigwedge^n V$ , 则有自然的乘积

$$B : \bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V \to \mathbb{R},$$

s.t.

$$\tau \wedge \mu = B(\tau, \mu)\Omega.$$

另外, $\langle -,- \rangle$ 在 $\bigwedge^k V$ 上也诱导了一个内积：对于 $\{x_i\}, \{y_i\} \subset V$ , 定义

$$\langle x_1 \wedge ... \wedge x_k, y_1 \wedge ... \wedge y_k \rangle := \det(\langle x_i, y_j \rangle)$$

可以验证命题1.1中给出的 $\bigwedge^k V$ 的基底是一组规范正交基, 因而易知上述乘积确实为一个内积. 这样 $\bigwedge^k V$ 通过乘积 $B$ 嵌入 $(\bigwedge^{n-k} V)^*$ 中, 而 $(\bigwedge^{n-k} V)^*$ 通过 $\langle -,- \rangle$ 与 $\bigwedge^{n-k} V$ 同构, 于是我们可以定义 **Hodge $\star$ 算子**:

$$\star : \bigwedge^k \to \bigwedge^{n-k},$$

$$\tau \wedge \omega = \langle \star\tau, \omega \rangle \, \Omega$$

例如

$$\star(dx^1 \wedge ... \wedge dx^k) = dx^{k+1} \wedge ... \wedge dx^n.$$

**命题 4.1.** $\star$ 具有以下性质.

*(i)* $\star 1 = \Omega$ , $\star\Omega = 1$.

*(ii)* 在 $\bigwedge^k V$ 上 $\star\star = (-1)^{kn}$ . 所以 $\star$ 是一个同构映射.

*(iii)* $\omega \wedge \star\eta = \langle \omega, \eta \rangle \, \Omega$, $\langle \star\omega, \star\eta \rangle = \langle \omega, \eta \rangle$ .

而在 $M$ 的每个余切空间 $T_p^*M$ 上 $g$ 都诱导了一个内积，自然有整体的丛映射

$$\star : \bigwedge^k M \to \bigwedge^{n-k} M,$$

$$(\star\omega) \mid_p := \star(\omega \mid_p),$$

其中右边的 $\star$ 是 $\bigwedge^k(T_p^*M)$ 上的算子.

最后，$\star$ 也在 $\bigwedge^k M$ 上定义了整体的内积 $(-,-)$

$$(\tau,\mu) := \int_M \tau\wedge\star\mu = \int_M \langle\mu,\tau\rangle\,\Omega.$$

易验证 $(-,-)$ 对称且正定. 内积自然地诱导了 $d:\bigwedge^{k-1}\to\bigwedge^k$ 的伴随

$$\delta : \bigwedge^k M \to \bigwedge^{k-1} M,$$

$$(d\tau,\mu) = (\tau,\delta\mu), \tau\in\bigwedge^{k-1}, \mu\in\bigwedge^k.$$

经计算得到

$$\delta = (-1)^{n(k+1)}\star d\star,$$

$$\delta\circ\delta = 0.$$

以 $\mathbb{R}^n$ 上的 1-形式 $\mu = \mu_i dx^i$ 为例，

$$\delta\mu = \sum\partial_i\mu_i,$$

所以 $\delta$ 是散度算子 $div$ 的推广. 显然 $d$ 是梯度算子 $grad$ 的推广. 鉴于 $\bigwedge^0 M$ 上的Laplace算子 $\Delta = div\ \ grad$ , Hodge 定义了重要的**Laplace-Hodge算子**：

$$\Delta = \delta d + d\delta : \bigwedge^k M \to \bigwedge^k M.$$

**命题 4.2.** *$\Delta$ 具有以下性质：*

*(i) 对光滑函数 $f$ , $\Delta f = -\mathrm{tr}\nabla^2 f$ .*

*(ii) $\Delta$ 是自伴算子，i.e. $(\Delta\mu,\nu) = (\mu,\Delta\nu)$.*

*(iii) $d\Delta = \Delta d$, $\star\Delta = \Delta\star$.*

下面从另一个角度导出L-H算子. 考虑 $M$ 上一个 $k-$形式的**能量泛函**：

$$\|\mu\| = (\mu,\mu).$$

物理学经常会考虑：什么样的 $\mu$ 会使能量极小化？一般来说会限制 $\mu$ 是闭形式，例如在Maxwell方程组中，电场 $E$ 就是一个闭的 $1-$ 形式，极小化意味着 $E$ 稳定. 我们通过变

分法得到

$$\|\mu\| \text{ is minimize} \Leftrightarrow d\mu = 0,\ \delta\mu = 0.$$

由于 $d, \delta$ 将 $\mu$ 映入不同次数的形式空间，所以上式等价于

$$d\mu = 0,\ \delta\mu = 0 \Leftrightarrow (d+\delta)\mu = 0.$$

而 $\Delta = (d+\delta)\circ(d+\delta)$ ，且

$$(\Delta\mu, \mu) = (d\mu, d\mu) + (\delta\mu, \delta\mu) \geq 0,$$

等号成立当且仅当 $\mu = 0$ . 所以

$$d\mu = 0,\ \delta\mu = 0 \Leftrightarrow \Delta\mu = 0.$$

即 $\mu$ 是**调和形式**. 全体调和形式构成 $\bigwedge M$ 的线性子空间 $\mathcal{H}(M)$ . 同时我们定义 $\mathrm{Im}\Delta = \Delta(\bigwedge M)$ . 由自伴性易证 $\mathcal{H}(M) \perp \mathrm{Im}\Delta$ . 直接计算还可以知道定向 $\Omega$ 是调和的.

## 5 Hodge定理的表述与应用

现在我们可以叙述重要的**Hodge定理**了，但在此之前我们先考虑一个简单的例子. 考虑 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ 上的全体全纯函数，我们知道 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ 非常“大”; 但如果考虑闭曲面 $S$ 上的调和函数 $u$，由有界性和Liouville定理可知 $u$ 只能是常值函数，即 $\Delta u = 0 \Leftrightarrow du = 0$ , 且 $u$ 就是 $H^0(S)$ 的生成元. Hodge定理就是这个例子的延伸: 椭圆微分算子 $\Delta$ 的 kernel 反映了 $M$ 的整体拓扑.

**定理 5.1.** *(Hodge) $\mathcal{H}(M)$ 是有限维的，且有**Hodge分解***

$$\bigwedge M = \mathcal{H}(M) \oplus \mathrm{Im}\Delta.$$

由于调和形式自然是闭的，有自然的嵌入

$$h : \mathcal{H}(M) \to H^*(M), \mu \mapsto [\mu].$$

作为Hodge定理的重要推论，

**定理 5.2.** *(Hodge) $h$ 是同构映射.*

证明. 单射性：设 $[\mu]=0$ i.e. $\mu=d\tau$ , 由调和易证 $\mu=0$ .
满射性：对任意 $[\tau]\in H^*(M)$ , $d\mu=0$, 所以分解为

$$\mu=\eta+\Delta\omega,$$

其中 $\eta$ 调和. 代入 $d\mu=0$ 由交换性可知 $d\omega$ 调和，则 $[\delta d\omega]=0$. 所以 $[\tau]=[\eta]$. □

所以 $H^*(M)$ 同构于 $\mathcal{H}(M)$ , 我们实现了拓扑对象的解析化. 在定理证明之前，首先介绍Hodge定理的几个有趣的应用.

## 5.1 Poincaré对偶

在Hodge定理的帮助下，Poincaré对偶有了一个简洁的证明. 由于 $\star$ 与 $\Delta$ 可交换，有以下线性映射

$$\star:\mathcal{H}^k(M)\to\mathcal{H}^{n-k}(M),$$

和乘积

$$\wedge:\mathcal{H}^k\times\mathcal{H}^{n-k}\to\mathcal{H}^n(M),\mu\wedge\tau=(\mu,\star\tau)\Omega.$$

而 $\star$ 在 $\bigwedge^k M$ 上是同构，自然诱导了 $\mathcal{H}^k(M)\cong\mathcal{H}^{n-k}(M)$ . 再由Hodge定理就得到Poincaré对偶，而且 $\star$ 就是对偶映射 $D$ .

## 5.2 Ricci曲率与第一Betti数

对黎曼流形 $(M,g)$ , 有著名的**Bochner公式**将 Laplace 算子 $\Delta$ 与 Ricci曲率张量 Ric 联系起来.

**命题 5.3.** *$\omega$ 是调和 $1-$ 形式当且仅当它的对偶向量场 $X$ 满足 $\mathrm{div}X=0$ 且 $\nabla X$ 是对称的2阶张量场.*

**定理 5.4.** *(Bochner) 对调和 $1-$ 形式 $\omega$ 和对偶的向量场 $X$ , 有*

$$\Delta|X|^2=2|\nabla X|^2+2\mathrm{Ric}(X,X),$$

如果 Ric 非负，则对上式积分，由Stokes公式和 $\Delta=\mathrm{div}\ \nabla$ 可得

$$\int_M|\nabla X|^2\leq 0,\ \text{i.e. } \nabla X\equiv 0,$$

即 $X$ 平行. 任取 $p \in M$, 则 $X(p)$ 的值唯一确定了 $X$ . 所以有自然的嵌入映射：

$$\mathcal{H}(M) \to \Gamma(TM) \to T_pM,$$

所以得到第一Betti数的上届估计

$$\beta_1(M) \le n.$$

考虑 $n$ 维环面可知上界是最优的. 如果 Ric 在一点处为正，那么就有 $X \equiv = 0$ , i.e $\beta_1(M) = 0$.

注 5. 利用Cheeger-Gromoll分裂定理和万有覆叠还可以证明如果 Ric 在一点处为正, 则 $\pi_1(M)$ 为有限群.

## 5.3 Hodge指标定理

$d+\delta$ 可看成两个算子：

$$D_1 = d+\delta : \bigwedge^{odd} M \to \bigwedge^{even} M,$$

$$D_2 = d+\delta : \bigwedge^{even} M \to \bigwedge^{odd} M.$$

由之前的论证可知 $\ker(d+\delta) = \mathcal{H}$ , 故

$$\ker D_1 = \mathcal{H}(M) \cap \bigwedge^{odd} M,$$

$$\ker D_2 = \mathcal{H}(M) \cap \bigwedge^{even} M,$$

于是

$$\dim \ker D_1 = \sum_{k\ge 0} \dim H^{2k}(M),$$

$$\dim \ker D_2 = \sum_{k\ge 0} \dim H^{2k+1}(M),$$

另外显然 $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathrm{ImD_2}$. 反之，若 $\mu = D_2\tau$ , 由Hodge定理，

$$\tau = \Delta\omega + \nu, \Delta\nu = 0.$$

所以 $D_2\nu=0$ . 所以 $\mu=D_2\Delta\omega+\Delta D_2\omega\in \mathrm{Im}\Delta$ . 所以 $\mathrm{Im}D_2=\mathrm{Im}\Delta$ . 再由Hodge定理可知

$$\mathrm{coker}\ D_2=\bigwedge^{odd}/\mathrm{Im}D_2=\bigwedge^{odd}/\mathrm{Im}\Delta=\mathcal{H}\cap\bigwedge^{odd}=\ker D_2.$$

所以得到**Hodge指标定理**:

$$\mathrm{ind}\ D_2=\dim\ker D_2-\dim\mathrm{coker}D_2=\chi(M),$$

即 $D_2$ 的指标正是 $M$ 的Euler示性数，是一个拓扑不变量.

# 6 Hodge定理的证明

这一节目标是简要叙述Hodge定理的证明. 出于分析上的考虑，我们需要把 $\bigwedge M$ 的系数从 $C^\infty$ 完备化为Sobolev空间 $H^s(s>0)$，并诱导 $\bigwedge M$ 上的 $H^s-$ 范数 $\|\cdot\|_s$ . 我们不加证明地承认以下来自偏微分方程和泛函分析的基本引理:

**引理 6.1.** *(弱解) 对于 $M$ 上的形式方程 $\Delta u=\alpha$ 的广义解，即线性泛函*

$$l:l(\Delta\psi)=(\alpha,\psi),\forall\psi,$$

*都存在弱解 $\omega\in\bigwedge M$ s.t.*

$$l(\cdot)=(\omega,\cdot).$$

**引理 6.2.** *(正则性) 如果上一个引理中的 $\alpha$ 光滑，则 $\omega$ 光滑, $\Delta\omega=\alpha$.*

**引理 6.3.** *(紧性) 如果 $\{\mu_n\},\{\Delta\mu_n\}\subset\bigwedge M$ 关于 $\|\cdot\|_s$ 有界，则存在收敛子列.*

下面开始证明 Hodge 定理.

Step 1. 对$k\in\mathbb{N}$ , $\mathcal{H}^k(M)$ 是有限维的.

否则有规范正交基 $\{e_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ s.t. $\Delta e_m=0$ , 由紧性引理有收敛子列，这与 $e_m$ 是规范正交基矛盾!

因此 $\mathcal{H}(M)$ 就是 $\bigwedge M$ 的闭子空间, 由投影定理，

$$\bigwedge M=\mathcal{H}(M)\oplus\mathcal{H}(M)^\perp.$$

Step 2. 我们还需要一个先验估计：存在 $C \geq 0$ , s.t.

$$\|\eta\|_s \leq C\|\Delta\eta\|_s,\ \forall \eta \in \mathcal{H}^{\perp}.$$

假设估计不成立，则存在 $\{\eta_n\} \subset \mathcal{H}^{\perp}$ , s.t.

$$\|\eta_n\|_s = 1, \|\Delta\eta_n\|_s \leq n^{-1}.$$

由紧性引理，不妨设 $\eta_n \to \eta \in \mathcal{H}^{\perp}$. 于是可以良好定义一个 $\bigwedge M$ 上的连续线性泛函

$$l : \psi \mapsto \lim \langle \eta_n, \psi \rangle .$$

那么

$$l(\Delta\psi) = \lim \langle \eta_n, \Delta\psi \rangle = \lim \langle \Delta\eta_n, \psi \rangle = 0,$$

i.e. $l$ 是方程 $\Delta u = 0$ 的广义解，由弱解的存在性和正则性，存在 $\omega \in \bigwedge M$ s.t.

$$\langle \omega, \psi \rangle = \lim \langle \eta_n, \psi \rangle ,$$

$$\Delta\omega = 0.$$

所以 $\eta_n$ 弱收敛于调和形式 $\omega$ , 结合 $\eta_n \to \eta$ 即有 $\eta_n \to \eta = \omega$ . 但是由弱收敛可知 $\omega \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp}$ , i.e. $\omega = 0$ , 与 $\|\eta\|_s = 1$ 矛盾！估计得证.

Step 3. $\mathrm{Im}\Delta = \mathcal{H}^{\perp}$ .

若 $\eta = \Delta\mu$ , 对任意 $\omega \in \mathcal{H}$ ,

$$(\eta, \omega) = (\mu, \Delta\omega) = 0.$$

所以 $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathcal{H}^{\perp}$ .

另外设 $\nu \in \mathcal{H}^{\perp}$ , 在 $\mathrm{Im}\Delta$ 上定义

$$l : l(\Delta\psi) = (\nu, \psi).$$

由正交性可知以上 $\psi$ 是唯一确定的, $l$ 良定义. 由 Step 3 可知 $l$ 在 $\mathrm{Im}\Delta$ 上有界, 则 $l$ 可延拓至 $\mathrm{I\bar{m}}\Delta$ 上，进一步至 $\bigwedge M$ 上，$l\,|_{\mathrm{I\bar{m}}\Delta^{\perp}} \equiv 0$. 由定义，$l$ 是方程 $\Delta u = \nu$ 的广义解, 由存在性和正则性引理可知存在 $\omega \in \bigwedge M$ s.t. $\nu = \Delta\omega \in \mathrm{Im}\Delta$ . 因此 $\mathrm{Im}\Delta = \mathcal{H}^{\perp}$ .

Step 4. 由 Step 1 和 Step 3 立刻证明了Hodge定理. □

# 参考文献

[1] 苏竞存, *流形的拓扑学*.

[2] 梅加强, *流形与几何初步*.